FL1

Monday, September 1, 2014 10:04 AM

Elizabeth Wulcan
MVH5076 (kontor)
wulcan@chalmers.se
Tel. 031 772 53 47

Hemsida: www.chalmers.se/Math/grundutb/CTH/tma660/1415
Bok: Linjär algebra, Gunnar Sparr
Examination: Tenta

LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Definition: en linjär ekvation är på formen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

$a_1, \dots, a_n, b$ reella tal, kallas koefficienter
$x_1, \dots, x_n$ variabler/obekanta.

Ex. a) $x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -5$ linjär

b) $x_1^2 - x_2 = 0$ ej linjär, x_1^2 ej tillåtet

c) $x + 3z - 14w = 22$ linjär

d) $y = 2x - 2$ linjär

e) $y = kx + m$ linjär om k koefficient
räta linjens ekv. ej linjär om k variabel

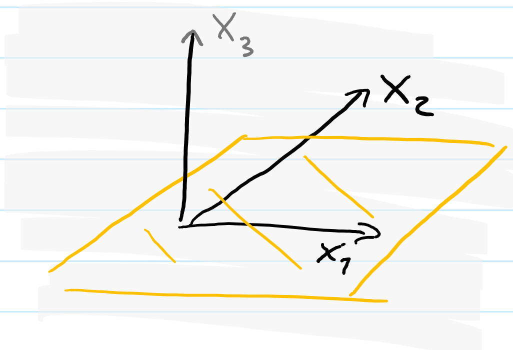
$\mathbb{R}^3$ 3-dim reella rummet

$x_3 = 0$

lösningen $= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$

$x_3 = 0$

lösningen = $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$



Allmänt:
lösningen till <u>en</u> linjär ekv.

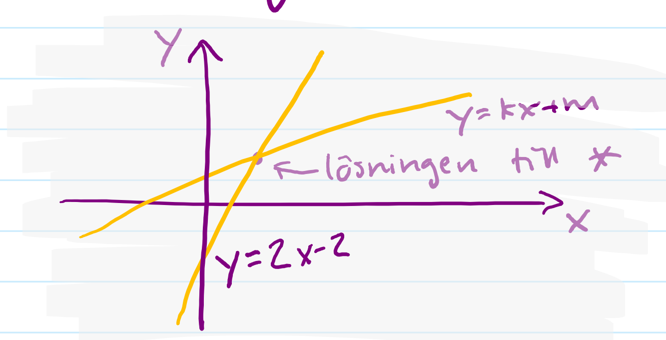
- i planet, dvs 2 variabler, är en linje
- i rummet, 3 —— || —— ett plan
- i högre dim, >3 variabler, "hyperplan"
  ett rum av dim n−1

DEFINITION

Ett (linjärt) ekvationssystem är en samling (linjära) ekvationer (i samma variabler)

Ex. $* \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = kx + m \end{cases}$

(x, y) lösningar till $*$ om båda ekvationerna uppfylls.



Hur många lösningar finns det till $*$?

- 1 lösning om $k \neq 2$
- 0 lösningar om $k = 2$
  och $m \neq -2$

och $m \neq -2$

- ∞ många lösningar om $k=2$ och $m=-2$

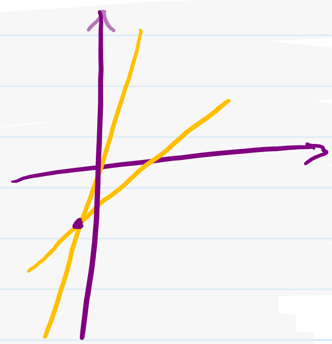
PÅSTÅENDE

Ett linjärt ekvationssystem
- saknar lösning eller
- har en unik lösning eller
- har ∞ många lösningar

LÖSA LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Gausselimination

Ex. $\begin{cases} y = 2x - 2 & (\mathrm{I}) \\ y = 6x & (\mathrm{II}) \end{cases}$



Idé: eliminera en variabel från en av ekvationerna

t.ex. eliminera y från II
Drag bort ekvationen I från II

$\Rightarrow \quad 0 = 4x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

sätt in i I

$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -3$

Lösning: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$

Ex. $* \begin{cases} 2y - 8z = 8 \\ x - 2y + z = 0 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$

- Vi eliminera x från ekv II och ekv III

$$* \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -4x+5y+9z=-9 \end{cases}$$

ekv III
multiplicera rad I med 4 och lägg till rad III

Byt plats!

$$\begin{cases} x-2y+z=0 & \mathrm{I} \quad 4 \\ 2y-8z=8 & \mathrm{II} \\ -4x+5y+9z=-9 & \mathrm{III} \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+z=0 & \mathrm{I}' \\ y-4z=4 \quad 3 & \mathrm{II}' \\ -3y+13z=-9 & \mathrm{III}' \end{cases}$$

• Vill eliminera y från ekv III, ersätt III' med 3·II' + III'

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-4z=4 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow y=4+4\cdot 3=16 \Rightarrow x=2\cdot 16-3=29$$

FORMALISERA DETTA

Definition: Operationerna

1) byt plats på ekvationerna

2) multiplicera ekvation med ett nollskilt tal

3) addition av en konstant gånger en ekv till en annan.
Kallas elementära radoperationer

SATS 1 s.9

Om ekv. system (**) fås genom att utföra elementära radoperationer på ekv. system (*), så har (*) och (**) samma lösningar.

Vi säger att (*) och (**) är ekvivalenta, (*) ⇔ (**)

Vi säger att (*) och (**) är ekvivalenta, (*) <=> (**)

Ex. ovan (*) har lösningen $\begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$

BEVIS

- Klart att inte operation 1) förändrar lösningsgången.
- Detsamma gäller 2).
- Kolla nu 3):

Antag

$$* \begin{cases} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \vdots \end{cases} \qquad ** \begin{cases} \mathrm{I} \\ k\mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \vdots \end{cases}$$

Om $(x_1, \dots, x_n)$ uppfyller I och II
så kommer de uppfylla $\mathrm{II} + k\mathrm{I}$,
dvs lösning till * => lösning till **

Å andra sidan om $(x_1, \dots, x_n)$ uppfyller I och $\mathrm{II} + k\mathrm{I}$,
så kommer $(\mathrm{II} + k\mathrm{I}) - k\mathrm{I} = \mathrm{II}$, dvs ** => *